ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ С «НЕТЕРПЕЛИВЫМИ» ЗАЯВКАМИ

Ю.И. Рыжиков, А.В. Уланов (Санкт-Петербург)

Введение

При решении ряда практических задач методами теории очередей приходится иметь дело с ограничением времени ожидания обслуживания некоторой (в общем случае случайной) величиной. Системы массового обслуживания (СМО) такого типа образуют класс систем с «нетерпеливыми» заявками.

Примеры негативного влияния «нетерпения» заявок:

• в системах противовоздушной обороны – наступательные и разведывательные средства противника находятся в зоне поражения ограниченное время, после которого уничтожить их невозможно;

• в медицине – не дождавшиеся больные умирают или нуждаются в специальном обслуживании, более длительном и дорогостоящем;

• в борьбе с преступностью – во время проведения розыскных мероприятий уголовники успевают скрыться, стареют улики;

• в сфере коммерческого обслуживания – клиенты уходят, не дождавшись обслуживания, соответственно фирма упускает возможный доход;

• в управлении – стареет информация и т.д.

Расчетом подобных СМО занимались с середины прошлого века [1, 2]. Однако анализ литературы [3-6] показал, что в настоящее время имеются методы расчета либо марковских многоканальных M/M/n-M (через дефис указан тип распределения времени «терпения»), либо *одноканальных* немарковских GI/G/1-G. В первом случае требование марковости предполагает, что распределения интервалов между заявками входящего потока, времен обслуживания в каналах и уходов из очереди по «нетерпению» показательные, чего в реальных задачах может не наблюдаться. Практически отсутствуют работы по расчету *многоканальных немарковских* систем с произвольным распределением «терпения», представляющих наибольший практический интерес. Единственное исключение составляет статья [7], посвященная расчету системы с гиперэкспоненциальным (H_2) распределением «терпения» M/M/n-H_2.

Известно, что H_2-распределение представляет собой две параллельные фазы с показательными распределениями пребывания в каждой, и заявка с вероятностью y попадает в первую фазу, а с вероятностью $(1 - y)$ – во вторую. Таким образом, при фиксации номера фазы «нетерпения», в которую попала заявка при постановке в очередь, исходный процесс становится марковским. Для всех возможных расстановок по фазам строится диаграмма переходов и составляется система линейных уравнений баланса переходов между состояниями системы при стационарном режиме. Данная система уравнений вследствие большой размерности может быть решена только численно, например, итерационным методом Такахаси-Таками [8]. С помощью этого метода было получено стационарное распределение числа заявок в системе M/M/n-H_2 и намечен путь решения более общей задачи – расчет системы M/H_2/n-H_2. Заметим, что H_2-распределение позволяет выровнять три начальных момента случайной величины любого исходного распределения, кроме Эрланга второго порядка.

Для верификации полученных результатов была необходима имитационная модель СМО с «нетерпеливыми» заявками M/M/n-G. Применение традиционных сред имитационного моделирования (GPSS, AnyLogic и т.д.) для решения этой задачи ограничено по следующим причинам:

• в упомянутых средах нет встроенных средств моделирования «нетерпения»;

• вследствие «универсальности» интерпретатора счет в данных средах среды замедляется в десятки раз [9].

Поэтому имитационная модель была написана на современном Фортране.

Логика моделирования

При описании логики модели ограничимся ее особенностями с учетом программной реализации на Фортране, имея в виду, что общая схема имитации работы многоканальной системы читателю известна. Перечислим специфику самой модели и технических приемов ее реализации:

в дополнение к ключевым (приходу и обслуживанию заявок) вводился новый тип событий – уходы по «нетерпению». Применен оператор SELECT CASE, которому предшествует выбор строки *m* управляющего массива, содержащего моменты ближайших событий каждого вида. Варианты обработки описаны в теле оператора CASE (m);

добавлена ветвь алгоритма, обеспечивающая уход «нетерпеливой» заявки;

для каждого из событий с помощью внутренних процедур создан собственный генератор случайных чисел;

при приеме заявки в очередь для нее не только запоминается время прибытия, но и формируется момент исчерпания «терпения» – добавлением к таймеру сформированного в соответствии с заданным законом распределения случайного времени «терпения»;

моменты уходов из очереди по «нетерпению» и освобождения каналов обслуживания заносятся в соответствующие массивы (назовем их рабочими массивами);

данные имеют иерархическую структуру – в управляющий массив помимо момента прибытия заявки переносятся минимумы из рабочих;

поиск минимальных моментов наступления событий производится по каналам обслуживания, по элементам очереди и управляющего массива, поэтому оформлен в виде внутренней процедуры;

распределение числа заявок в системе рассчитывается как отношение времени, в течение которого в системе находилось соответствующее число заявок, к общему времени работы модели.

Результаты применения

Для описанной модели системы M/M/n-G были запрограммированы генераторы случайных чисел следующих распределений времени «терпения» – показательного (M, коэффициент вариации $\nu = 1$), гиперэкспоненциального (H_2, $\nu = 2$) и Эрланга третьего порядка (E_3, $\nu = 0{,}577$).

Исходные данные:

число каналов $n = 3$;

коэффициент загрузки $\rho = 0.7$;

среднее время обслуживания $b_1 = 1$;

среднее время «терпения» $g_1 = 1$.

Та же модель была обсчитана итерационным методом с помощью H_2-аппроксимации времени «терпения». Как упоминалось ранее, применение данного распределения позволяет сохранить три начальных момента исходного, чего для инженерных расчетов вполне достаточно.

Результаты имитационного моделирования и численного расчета распределения числа заявок в системе представлены в табл. 1.

Таблица 1

Распределение числа заявок в системе M/M/n-G

Вероят-ности	Тип распределения «терпения»					
	M		H_2		E_3	
	Имитация	Расчет	Имитация	Расчет	Имитация	Расчет
p_0	0.5893e–1	0.5911e–1	0.6923e–1	0.6897e–1	0.4996e–1	0.5109e–1
p_1	0.1594e+0	0.1596e+0	0.1873e+0	0.1862e+0	0.1351e+0	0.1379e+0
p_2	0.2154e+0	0.2155e+0	0.2528e+0	0.2514e+0	0.1819e+0	0.1862e+0
p_3	0.1939e+0	0.1939e+0	0.2276e+0	0.2263e+0	0.1636e+0	0.1676e+0
p_4	0.1497e+0	0.1496e+0	0.1448e+0	0.1450e+0	0.1419e+0	0.1450e+0
p_5	0.1011e+0	0.1010e+0	0.7244e–1	0.7368e–1	0.1145e+0	0.1149e+0
p_6	0.6070e–1	0.6058e–1	0.3016e–1	0.3141e–1	0.8458e–1	0.8221e–1
p_7	0.3275e–1	0.3271e–1	0.1085e–1	0.1163e–1	0.5679e–1	0.5309e–1
p_8	0.1605e–1	0.1606e–1	0.3452e–2	0.3834e–2	0.3463e–1	0.3108e–1
p_9	0.7248e–2	0.7227e–2	0.9921e–3	0.1145e–2	0.1925e–1	0.1659e–1

Из представленных в таблице результатов следует, что алгоритмы и программы, реализующие методы имитационного моделирования и численного расчета, и сами эти методы верны.

Заключение

Несмотря на широкую область потенциальных приложений, в литературе по теории очередей методам расчета многоканальных немарковских СМО с «нетерпеливыми» заявками не уделяется должного внимания. Среды имитационного моделирования (GPSS, AnyLogic и т.д.) также не поддерживают данный класс систем с очередями. Построение имитационных моделей на современном Фортране позволяет учитывать уходы заявок по «нетерпению», хотя и усложняет создание модели, поскольку разработчик вынужден *полностью* ее программировать от логики до генераторов случайных величин.

Эффективным численным методом расчета данного класса СМО, как и вообще многоканальных немарковских, является аппроксимация непоказательных распределений фазовыми, построение диаграмм переходов и последующее решение систем линейных уравнений баланса итерационным методом Такахаси-Таками. Согласие результатов численного метода расчета с моделированием подтверждает правильность первого в его идее и программной реализации.

Литература

1. **Barrer D.Y.** Queueing with Impatient Customers and Indifferent Clerks // Operation Researc. – 1957. – V. 5. – № 5. – P. 294–400.
2. **Barrer D.Y.** Queuing with Impatient Customers and Ordered Service // Operation Research. – 1957. V. 5. – № 7. – P. 385–389.
3. **Гнеденко Б.В**. Об одной задаче массового облуживания // Доклады АН УССР, 1958. –С. 477–479.
4. **Саати Т. Л.** Элементы теории массового обслуживания и ее приложения / Пер. с англ. – М.: Сов. радио, 1965. – 510 с.
5. **Hoshi K., Iijima S., Takahashi Y., Komatsu N**., TrafficPerfomance for a Time-Out Scheme Communication System // International Conference on Ultra Modern Communications ICUMT’2009.

6. **Бочаров П.П., Печинкин А.В**. Теория массового обслуживания: учебник. – М.: РУДН им. П. Лумумбы, 1995. – 529 с.
7. **Roubos A., Jouini O**. Call Centers with Hyperexponential Patience Modeling // International Journal of Production Economics. – 2013. – V.141. – P. 307–315.
8. **Takahashi Y., Takami Y**. A Numerical Method for the Steady-State Propabilities of a GI/G/c Queuing System in General Class // J. of the Op. Res. Soc. of Japan. 1976. – V. 19. – №. 2. – P. 147–155.
9. **Кокорин С.В., Рыжиков Ю.И.** Оптимизация параметров сетей массового обслуживания на основе комбинированного использования аналитических и имитационных моделей // Приборостроение. – 2010. – № 11. – С.61–66.