МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЛЬЕФА МЕСТНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СОБОЛЯ

Г.М. Антонова, А.В. Савин (Москва)

Введение

Достаточно часто на практике возникает необходимость построения матрицы высоты ***X*** для труднодоступной местности, которая адекватно описывается узловыми точками равномерной сетки [1]. Значения элементов матрицы отражают высоты точек над уровнем моря. Если местность аппроксимировать достаточно большим количеством точек выбранной сетки, то можно построить матрицу высоты, которая позволит в любом месте путем аппроксимации выявить особенности рельефа и проверить его пригодность для реализации поставленных задач.

Для построения цифровой модели рельефа труднодоступной местности можно использовать инфракрасные снимки. Они позволяют определить температуры во всех точках рельефа, опираясь на утверждение о том, что, чем теплее объект, тем сильнее инфракрасное излучение, испускаемое им. Существует специальная аппаратура, которая зафиксирует тепловое состояние поверхности на фотографии. Исходя из полученных температур, можно определить высоты выбранных точек, принимая в расчет тот факт, что при изменении высоты на 100 метров температура понижается на 0,65°С. Таким образом, если температура в ближайшей точке, находящейся на уровне моря, равна t_0, а температура в самой точке равна *t*, то высота h данной точки над уровнем моря равна: $h = \frac{t_0 - t}{0{,}65} * 100$ метров.

Данные, полученные с помощью инфракрасной фотографии, можно объединить в виде матрицы фотографии ***A***. Ее размерность равна (n_1, n_2), и можно предположить без ущерба для общности, что $n_1>2$, $n_2>2$.

Очевидно, что должно быть установлено соответствие высот, полученных с помощью фотографии и высот, измеренных на Земле. Для этого предварительно выполняются измерения высот в некоторых точках местности. Существует метод, согласно которому измеряется давление p в миллиметрах ртутного столба и средняя температура $T_{ср}$ в градусах Цельсия в нужных точках, затем определяется давление p_0 на уровне моря рядом с точками измерения. Далее определяются высоты точек над уровнем моря h в метрах согласно формуле Бабинэ: $h = 16000 * \frac{p_0 - p}{p_0 + p}(1 + 0{,}00366 T_{ср})$.

Эти данные образуют матрицу измерений ***B*** также с размерностью (n_1, n_2). Для определенности значения этой матрицы в точках, в которых измерения не проводились, устанавливаются равными нулю.

Матрицы ***A*** и ***B*** неизбежно содержат в себе определенные погрешности, а матрица фотографии не отражает адекватно реальные высоты точек рельефа, но в определенной мере она отражает разность в высотах между близкими точками.

Матрица высоты ***X*** должна удовлетворять следующим условиям:

быть достаточно близкой к матрице измерений в измеренных точках;

быть похожей на матрицу фотографии в том смысле, что разность между ее соседними элементами должна быть близка к аналогичной разности между соответствующими элементами фотографии.

Предлагается решение задачи при помощи метода наименьших квадратов [2,3]. Для построения матрицы $\boldsymbol{X}$ выбирается выражение F, которое необходимо минимизировать, используя как результаты измерений, так и информацию, содержащуюся в инфракрасных снимках.

$$F = \sum_{s=1}^{l} (x_{i_s,j_s} - b_{i_s,j_s})^2 + ||X_{up} - A_{up}||_F^2 + ||X_{left} - A_{left}||_F^2,$$

где $||.||_F$ – это норма Фробениуса, для матрицы $\boldsymbol{S}$ она будет равна

$$||S||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} s_{ij}^{\,2}},$$

$\boldsymbol{X}_{up}$, $\boldsymbol{A}_{up}$ – верхние производные матриц $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{A}$, определенные специальным образом,

$\boldsymbol{X}_{left}$, $\boldsymbol{A}_{left}$ – левые производные матриц $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{A}$, также определенные специальным образом.

Алгоритм расчета для построения цифровой модели рельефа местности

Пусть матрица высоты $\boldsymbol{X}$, матрица измерений $\boldsymbol{B}$ и матрица фотографии $\boldsymbol{A}$ имеют размер (n_1, n_2). Без потери общности можно предположить, что n_1>2, n_2>2. Введем определения верхней и левой производной матрицы.

Определение 1. Верхней производной матрицы L=(l_{ij}) размера (n_1,n_2) называется матрица L_{up} размера ((n_1-1),n_2), имеющая вид:

$$\begin{pmatrix} l_{11} - l_{21} l_{12} - l_{22} \dots & l_{1n_2} - l_{2n_2} \\ l_{21} - l_{31} l_{22} - l_{32} \dots & l_{2n_2} - l_{3n_2} \\ & \\ l_{n_1-1,1} - l_{n_1,1} l_{n_1-1,2} - l_{n_1,2} \dots & l_{n_1-1,n_2} - l_{n_1,n_2} \end{pmatrix}$$

Определение 2. Левой производной матрицы L=(l_{ij}) размера (n_1,n_2) называется матрица L_{left} размера (n_1,(n_2-1)), имеющая вид:

$$\begin{pmatrix} l_{11} - l_{12} l_{12} - l_{13} \dots & l_{1,n_2-1} - l_{1,n_2} \\ l_{21} - l_{22} l_{22} - l_{23} \dots & l_{2,n_2-1} - l_{2,n_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ l_{n_1,1} - l_{n_1,2} l_{n_1,2} - l_{n_1,3} \dots & l_{n_1,n_2-1} - l_{n_1,n_2} \end{pmatrix}$$

Для пояснения введенных определений можно рассмотреть простой пример. Для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

верхней и левой производными будут соответственно матрица-строка (-2 -2) и матрица-столбец $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Пусть $b_{i_1,j_1}, \dots, b_{i_l,j_l}$ – элементы матрицы $\boldsymbol{B}$, в которых были сделаны замеры, $x_{i_1,j_1},\dots,x_{i_l,j_l}$ – соответствующие элементы матрицы $\boldsymbol{X}$. Для построения матрицы $\boldsymbol{X}$ необходимо найти точку экстремума выражения:

$$F = \sum_{s=1}^{l}(x_{i_s,j_s} \quad b_{i_s,j_s})^2 + ||X_{up} \quad A_{up}||_F^2 + ||X_{left} \quad A_{left}||_F^2$$

.

Это потребует решить систему из ($n_1 \times n_2$) уравнений с таким же числом неизвестных x_{ij}:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_{ij}} = 0 \ (I)$$

,

где (i=1,2,…, n_1; j=1,2,…,n_2).

Назовем соседями элемента x_{ij} элементы $x_{i-1,j}$,$x_{i,j-1}$,$x_{i+1,j}$,$x_{i,j+1}$, если они существуют.

Пронумеруем сначала все элементы матриц ***X*** и ***A*** числами от 1 до ($n_1 \times n_2$) в порядке возрастания номеров их строк, а в каждой строке по порядку возрастания номеров столбцов. Так, элемент (i,j) получит номер (i-1)$\times$ n_2 +j.

Введем квадратную матрицу С размера (($n_1 \times n_2$), ($n_1 \times n_2$)), элементы которой определим формулами

$$c_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2(||X_{up}||_F^2 + ||X_{left}||_F^2)}{\partial x_i \partial x_j}$$, где i,j=1,2,…,$n_1 n_2$.

В этой матрице на позиции (i,i) стоит число соседей i-го элемента, а в i-й строке на местах, соответствующих соседям i-го элемента стоит число (-1). Остальные элементы равны нулю. Так, на диагоналях матрицы с номерами n_2 и -n_2 стоят только элементы «-1», на диагонали с номером 1 числу «-1» равны все элементы, кроме элементов в строках, номера которых кратны n_2, на диагонали с номером -1 числу «-1» равны все элементы, кроме элементов в строках, номера которых сравнимы с -1 по модулю n_2, на главной диагонали элементы «2» стоят встроках с номерами 1, n_2, $n_1 n_2 - n_2$, $n_1 n_2$; элементы «3» в строках с номерами 2,3,…, $n_2 - 1$; $n_1 n_2 - n_2 + 1$, $n_1 n_2 - n_2 + 2$,…, $n_1 n_2$, и в строках, номера которых сравнимы с 1 по модулю n_2, на остальных местах главной диагонали стоят элементы «4». В неуказанных местах матрицы стоят нули. Матрица С является симметричной и вырожденной, т.к. сумма всех ее строк есть нулевая строка.

В случае $n_1 = n_2 = 4$ матрица С будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}$$

Введем дополнительную квадратную матрицу H размера $((n_1 \times n_2), (n_1 \times n_2))$, элементы которой определяются формулой

$$h_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 (\sum_{s=1}^{l} x_{i_s,j_s}{}^2)}{\partial x_i \partial x_j},\text{ где i,j=1,2,}\ldots, n_1 n_2.$$

В этой матрице на позициях (k_s, k_s) (s=1,…l), где $k_1, \ldots k_l$ – номера всех измеренных элементов, стоит число 1, остальные элементы равны нулю. Так, $h_{(i_s-1)n_2+j_s,(i_s-1)n_2+j_s} = 1$ (s=1,…,l), другие элементы – нулевые. В случае $n_1 = n_2 = 4$ и замеров высоты в точках (2,2); (2,4); (4,2); (4,4) матрица H имеет вид:

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}$$

Пусть теперь X_c, A_c, B_c, содержат элементы матриц ***X***, ***A***, ***B***, записанных в виде столбцов длины $(n_1 \times n_2)$ соответственно. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Систему уравнений (I) можно записать в виде

$$(C+H)X_c = CA_c + HB_c \quad (II)$$

Утверждение. Матрица (C+H) является неразложимой.

Теорема 2. $max_{s=1}^{k} |b_{i_s,j_s} - x_{i_s,j_s}| \le 72\, max_{s=1}^{k} |b_{i_s,j_s} - a_{i_s,j_s}|$.

Заключение

Предлагаемый метод использует достаточно простую запись системы уравнений, связывающей измерения и неизвестные элементы матрицы ***X***, и не требует большого объема вычислений для решения преобразованной системы уравнений. Пробные расчеты проведены с использованием широкоизвестного пакета Wolfram Mathematica для тестовых значений исходных данных и равномерной прямоугольной сетки. Возникает вопрос, как организовать измерения на местности для получения наиболее адекватного представления о цифровом рельефе. Очевидно, что матрица измерений должна наилучшим образом описывать неизвестный рельеф. Существующие алгоритмы выбора точек, равномерных в многомерном пространстве параметров [4], позволяют усовершенствовать процедуру моделирования цифрового рельефа местности.

Литература

1. Антонова Г.М., Савин А.В. Построение цифровой модели рельефа с использованием последовательности Соболя // Сб. материалов 11 Межд. научн.-т. конф. «Распознавание-2013». – Курск: Изд-во ЮЗГУ, 2013. – С. 19–21.
2. Волков Ю.С., Мирошниченко **В.Л.** Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам // Сибирский математический журнал. – 2009. – Т. 5. – № 6.
3. Богачев К.Ю. Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. – М.: МГУ, 1998. – 137 с.
4. Соболь И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. – М.: Наука, 1969. – 288 с.