

**О ТРАНЗИТИВНОМ ПОДХОДЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ
И ОЦЕНКЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ****В. М. Шпаков (Санкт-Петербург)**

1. Введение. Потребность в реализации случайных процессов возникает при компьютерном моделировании динамических систем, использующих случайные управляющие сигналы или / и находящихся под воздействием случайных помех. При этом существует задача реализации случайных процессов, обладающих заданными статистическими свойствами, и задача оценки статистических характеристик процессов, преобразованных динамическими элементами системы. Для реализации стационарных случайных процессов используются моделирующие алгоритмы, основанные на линейном преобразовании последовательности независимых случайных чисел (дискретный белый шум) в последовательность чисел, коррелированных в соответствии с требуемой корреляционной функцией. Вид этой функции определяется параметрами алгоритмов, значения которых находятся на этапе подготовки к моделированию. Наиболее известными являются алгоритмы, основанные на методе скользящего суммирования и на методе рекуррентных разностных уравнений [1]. Существуют также разработки автоматизированных информационных систем (АИС), предназначенных для реализации случайных процессов и для их корреляционно-спектрального анализа [2]. Эти алгоритмы и АИС позволяют решать задачи моделирования и анализа функционирования динамических систем при случайных воздействиях. Однако при моделировании больших промышленных установок и особенно при моделировании и реализации их систем управления желательно реализовывать и анализировать случайные процессы с помощью тех же алгоритмов, которые используются для реализации других, дискретно-событийных и гибридных, происходящих в системе процессов.

Целью данного доклада является изложение результатов экспериментального исследования методов моделирования случайных процессов и методов оценки их статистических характеристик, основанных на транзитивном подходе к спецификации и реализации процессов. В основе подхода лежит модель гибридного автомата, функции перехода которой специфицируются с помощью правил трансформации дискретных и непрерывных состояний процессов и реализуются соответствующими процедурами интерпретатора этих правил. Язык трансформационных правил ориентирован на спецификацию процессов и в этом отношении является языком более высокого уровня, чем универсальные языки программирования. Эффективность подхода для моделирования динамических систем была проиллюстрирована разработкой имитационных моделей ряда физических систем и больших промышленных установок [3].

Далее кратко излагаются необходимые для понимания основные положения транзитивного подхода к реализации гибридных процессов [4]. Текущее состояние совокупности гибридных процессов задается множеством вещественных переменных X , представляющих непрерывные составляющие, и множеством логических переменных W , представляющих дискретные составляющие процессов и предикаты от непрерывных состояний. В данном докладе нас будут интересовать только непрерывные составляющие процессов. Для их спецификации необходимо задать функцию перехода следующего типа: $\delta: W \times X \rightarrow X$. Эта функция определяется трансформационными правилами, условная часть которых содержит логическую переменную, представляющую ситуацию или режим, а исполнительная часть – транзитивное отношение между текущим и следующим состояниями процесса. В случае свободного одномерного непрерывного процесса отношение следования или транзитивное отношение (transition relation) представляет собой бинарное отношение на множестве вещественных чисел вида $\tau(y, y')$ или $y' = \tau(y)$, где y – текущее со-

стояние процесса, а y' – следующее состояние процесса. Транзитивное отношение τ определяется параметрами динамического звена и длительностью интервала времени Δt между y и y' . В случае вынужденного процесса оно также зависит от внешнего воздействия x . Для реализации зависимости непрерывных состояний от логики развития гибридного процесса, процедуры вычисления этих отношений включаются в исполнительные части правил, условными частями которых являются требуемые значения соответствующих режимов. Эти правила имеют вид

$$S_j \rightarrow x'_k = \tau_k(x_k, x), \quad x_k, x \in X, \quad (1)$$

где S_j – ситуация, определяющая режим, τ_k и x_k – соответствующие отношение и состояние, x – вещественная переменная модели.

Компьютерная реализация процессов, специфицированных трансформационными правилами, производится путем использования интерпретатора этих правил. Основу интерпретатора составляет исполняющая процедура, которая в цикле сканирует списки правил. Транзитивный подход к реализации процессов был использован при разработке в СПИИ РАН опытного образца компьютерной среды *EnvCon*, ориентированной на моделирование совокупностей взаимодействующих гибридных процессов [5]. Среда содержит редакторы для формирования векторов состояния процессов и списков правил трансформации состояний процессов. Для обработки правил (1) в среде имеется набор процедур реализации арифметических операторов, элементарных функций и транзитивных отношений для элементарных процессов. В частности, имеются процедуры для реализации интеграторов, дифференциаторов, аperiodических звеньев, колебательных звеньев, звеньев чистого запаздывания. Второй раздел содержит описания правил для реализации и оценки случайных процессов, примеры и результаты моделирования некоторых случайных процессов.

2. Реализация и оценка случайных процессов. Будут рассматриваться только стационарные эргодические процессы, то есть процессы, характеристики которых не изменяются во времени и для которых среднее по времени реализации совпадает со средним по ансамблю реализаций. Основными характеристиками случайного процесса являются: математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение, корреляционная функция и спектральная плотность.

Теоретически формировать случайный процесс с заданными характеристиками проще всего, подавая единичный белый шум на линейную динамическую систему, имеющую требуемую частотную передаточную функцию. Спектральная плотность процесса на выходе системы в этом случае полностью определяется передаточной функцией системы. По виду спектральной плотности с помощью таблиц соответствия можно определить корреляционную функцию процесса и его числовые характеристики. При моделировании случайных процессов в качестве исходного процесса используют случайный ступенчатый процесс (псевдослучайная последовательность). Такой процесс формируется путем обращения в цикле исполняющей процедуры к генератору случайных чисел и присваивания полученного значения состоянию процесса. Среда *EnvCon* была использована для экспериментальных исследований методов реализации и оценки случайных процессов. Редактор правил этой среды имеет достаточно наглядный интерфейс, поэтому рассматриваемые ниже спецификации процессов будут представлены в формате интерфейса этой среды.

Для оценки математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции необходима операция осреднения последовательности числовых значений по времени. Одним из очевидных методов получения средних значений является реализация алгоритма вычисления скользящего среднего. Процедура, реализующая этот алгоритм, введена в ре-

дактор правил среды EnviCon под именем *Скольз. среднее*. На практике в качестве оператора осреднения по времени может быть использовано апериодическое звено. Это звено является фильтром нижних частот. При подаче случайного процесса на вход этого звена на выходе после затухания переходного процесса будет также случайный процесс. Этот процесс будет иметь то же математическое ожидание, что и входной процесс, и существенно меньшую дисперсию. Величина дисперсии тем меньше, чем выше спектр входного сигнала и чем больше значение постоянной времени звена.

Корреляционная функция стационарного процесса $R_x(t_1, t_2)$ зависит только от разности аргументов $\tau = t_1 - t_2$. Оценку значений $R_x(\tau)$ для эргодического процесса можно получить путем осреднения по времени соответствующих произведений состояний процесса. Корреляционная функция является четной симметричной функцией, т.е. $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$. Поэтому для ее оценки можно использовать состояние процесса, задержанного относительно текущего состояния. Задержку процесса удобно производить с помощью звена чистого запаздывания. На вход такого звена поступает текущее состояние, а с выхода снимается состояние, задержанное на τ . В основе алгоритма реализации звена чистого запаздывания лежит алгоритм реализации очереди, использующий связный список.

Теоретически корреляционная функция ступенчатого процесса с некоррелированными состояниями имеет вид треугольника и определяется формулой $R_x(\tau) = D \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_c}\right)$ при $|\tau| < \tau_c$ и $R_x(\tau) = 0$ при $|\tau| > \tau_c$, где D – дисперсия, τ_c – длительность ступеньки [6]. Длительность ступеньки процесса определяется заданием интервала продвижения модельного времени и приоритетом правила, обращающегося к генератору случайных чисел. При уменьшении длительности ступеньки происходит уменьшение основания треугольника, и корреляционная функция ступенчатого процесса приближается к δ – функции, являющейся корреляционной функцией белого шума. Спектральная плотность ступенчатого случайного процесса с равномерным законом распределения состояний для низких частот может быть представлена формулой $S(\omega) = D \cdot \tau_c$ [6]. Ступенчатый процесс с дисперсией $D = 1/\tau_c$ может использоваться для области низких частот как эквивалент единичного белого шума. Область низких частот тем шире, чем меньше длительность ступеньки.

Среди реальных случайных процессов часто встречаются процессы, имеющие равномерный спектр в некоторой ограниченной полосе частот ω_n , затухающий за ее пределами. Такие процессы имеют корреляционную функцию экспоненциального вида: $R(\tau) = D \cdot e^{-\alpha \cdot |\tau|}$. Эти процессы можно реализовать, подавая случайный ступенчатый процесс эквивалентный белому шуму на апериодическое звено с постоянной времени $T = 1/\alpha$. При этом ширина полосы частот процесса на выходе будет определяться $\omega_n = 1/T$. С целью оценки применимости указанного метода было проведено моделирование прохождения ступенчатого случайного процесса с длительностью ступеньки $\tau_c = 0,001$ через апериодическое звено с $T = 0,2$ с. На рис. 1 приведены трансформационные правила, специфицирующие эту модель. Первое правило формирует ступенчатый процесс, второе – центрирует этот процесс. Третье правило формирует случайный процесс на выходе апериодического звена. Четвертое правило вычисляет произведение состояний процесса, а пятое производит усреднение этого произведения, т.е. вычисляет дисперсию процесса или значение корреляционной функции при $\tau = 0,0$. Следующие три правила вычисляют значение корреляционной функции при $\tau = 0,03$. Для вычисления остальных значений используются аналогичные тройки правил.

№	Переменная	Процедура	Коэффициент	Аргумент 1	Аргумент 2	Ситуация	Имя параметра	значение
1	Ступ. процесс	Равномерное, 0-1	100.00	50 const		EverTrue		
2	Ступ. Проц. Центр	Сумма	10.09	Ступ. процесс	50 const	EverTrue	2-ой коэффициент	-1.00
3	Процесс	Апериодическая	1.0	Ступ. Проц. Центр		EverTrue	Пост. времени	0.2
4	Проц*Проц	Умножение	1.00	Процесс	Процесс	EverTrue		
5	Дисперсия проц.	Апериодическая	1.00	Проц*Проц		EverTrue	Пост. времени	550.00
6	сдвиг на tau 1	Запаздывание	1.00	Процесс		EverTrue	Запаздывание	0.03
7	Проц * сдвиг 1	Умножение	1.00	Процесс	сдвиг на tau 1	EverTrue		
8	Корреляция 1	Апериодическая	1.00	Проц * сдвиг 1		Усреднение	Пост. времени	550.00
9	сдвиг на tau 2	Запаздывание	1.00	сдвиг на tau 1		EverTrue	Запаздывание	0.03
10	Проц * сдвиг 2	Умножение	1.00	Процесс	сдвиг на tau 2	EverTrue		
11	Корреляция 2	Апериодическая	1.00	Проц * сдвиг 2		Усреднение	Пост. времени	550.00

Рис. 1. Правила для оценки корреляционной функции процесса на выходе апериодического звена

Сравнение полученных модельных и расчетных значений корреляционной функции позволяет сделать вывод о том, что полученная оценка является репрезентативной.

В рассмотренном примере апериодическое звено выполняло функцию фильтра, формирующего случайный процесс с заданной корреляционной функцией. Используя соответствующие формирующие фильтры, можно реализовать случайные процессы с требуемыми характеристиками. Чаще всего используются фильтры, имеющие дробно-рациональные передаточные функции. Такие фильтры очень легко реализуются с помощью рассматриваемого подхода. Покажем это на примере моделирования нерегулярной качки. Для реализации качки часто используют фильтр с передаточной функцией [6]:

$$F(p) = \frac{K_{\omega} \cdot p}{p^2 + 2\lambda\omega_0 p + \omega_0^2}, \quad (2)$$

где K_{ω} – коэффициент, определяющий интенсивность волнения, ω_0 – доминирующая частота волн, λ – коэффициент затухания. Из приведенной формулы нетрудно видеть, что фильтр представляет собой последовательное соединение колебательного и дифференцирующего звеньев. Колебательное звено может быть реализовано с помощью двух интеграторов, охваченных основной обратной связью и обратной связью по скорости. На рис.2 приведена структурная схема формирующего фильтра нерегулярной качки.

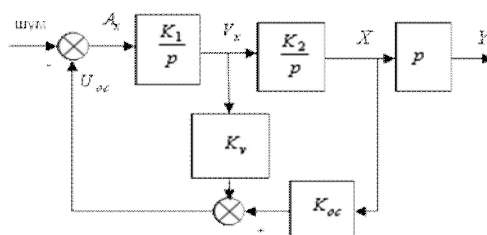


Рис. 2. Структурная схема формирующего фильтра нерегулярной качки

Чтобы найти передаточную функцию системы, приведенной на рис. 2, необходимо дважды последовательно применить формулу для замыкания системы. Вначале – для контура обратной связи по скорости, затем для основного контура. В результате в приведенных на схеме обозначениях будем иметь

$$F(p) = \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot p}{p^2 + K_1 \cdot K_v \cdot p + K_1 \cdot K_2 \cdot K_{oc}}.$$

Сравнивая полученную формулу с (2), находим $K_{\omega} = K_1 \cdot K_2$, $\omega_0 = \sqrt{K_1 \cdot K_2 \cdot K_{oc}}$, $\lambda = \frac{K_1 \cdot K_v}{2 \cdot \sqrt{K_1 \cdot K_2 \cdot K_{oc}}}$. Моделирование качки было проведено для значений $K_1 = K_2 = K_{oc} = 1$ и

$K_v = 0,1$. Правила, специфицирующие рассматриваемый процесс, приведены на рис. 3. Первые два правила моделируют ступенчатый случайный процесс, эквивалентный белому шуму, следующие пять правил моделируют два сумматора, два интегратора и дифференциатор в соответствии с приведенной схемой. На рис. 4 представлен график полученного процесса нерегулярной качки. Из графика видно наличие в процессе доминирующего колебания. Измерение периода этого колебания показало, что его круговая частота близка к теоретическому значению $\omega_0 = 1$.

№	Переменная	Процедура	Коэффициент	Аргумент 1	Аргумент 2	Ситуация	Имя параметра	Значение
1	Экв. белый шум	Равномерное, 0-1	100.00			EverTrue		
2	шум центрир.	Сумма	1.0983	Экв. белый шум	1 const	EverTrue	2-ой коэффициент	-50.0
3	U Обр. связь	Сумма	-1.00	X отклонение	Vx скорость	EverTrue	2-ой коэффициент	0.5
4	Ax ускорение	Сумма	1.00	U Обр. связь	шум центрир.	EverTrue	2-ой коэффициент	1.00
5	Vx скорость	Интеграл	1.00	Ax ускорение		EverTrue		
6	X отклонение	Интеграл	1.00	Vx скорость		EverTrue		
7	Y вых. процесс	Производная	1.00	X отклонение		EverTrue		

Рис. 3. Правила для моделирования нерегулярной качки

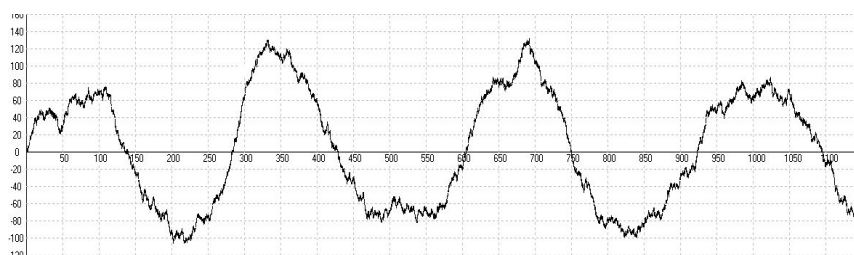


Рис. 4. График процесса нерегулярной качки

3. Заключение. Проведенное рассмотрение и приведенные результаты экспериментальных исследований позволяют сделать вывод о том, что основанный на правилах транзитивный подход может эффективно быть использован для спецификации и реализации случайных процессов, а также для оценки их характеристик. Введение правил для оценки случайных процессов позволяет заметно расширить возможности формализации знаний экспертов при спецификации процессов управления. Наличие оценок статистических характеристик процессов позволяет находить оценки вероятности истинности (ложности) предикатов от состояний этих процессов. А это, в свою очередь, позволяет вычислять вероятности возникновения определенных ситуаций. Понятно, что существует потребность предпринимать необходимые действия не только при возникновении, например, аварийной ситуации, но и при определенной вероятности ее возникновения.

Литература

1. Дигрис А.В. Дискретно-событийное моделирование [Электронный ресурс]: курс лекций. – Минск: БГУ, 2011. <http://www.elib.bsu.by>.
2. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов. – Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2001. – 209 с.
3. Буткевич И.К., Рыдник Е.А., Шпаков В.М. Использование среды EnviCon для моделирования производства жидкого гелия // Тр. СПИИ РАН. Вып. 5. – СПб.6 Наука, 2007. – С. 328–332.

4. **Шпаков В.М.** Исполняемые спецификации транзитивных моделей технологических процессов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2004. – № 3. – С. 38–45.
5. **Шпаков В.М.**, Прототип среды моделирования структурированных совокупностей взаимодействующих процессов // Сб. докл. конф. «Имитационное моделирование. Теория и практика». – СПб., 19–21 октября, 2005. – Т. II. – С. 292–295.
6. **Поляков К.Ю.** Теория автоматического управления для чайников. Часть II. Управление при случайных возмущениях. – СПб., 2009. http://www.infoterra.ru/oty/books/files/tau-2_dlya_chainikov.pdf. 59 с.