# АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОРТФЕЛЕЙ СРОЧНЫХ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ

**Т. А. Уразаева, А. В. Бородин (Йошкар-Ола)**

На протяжении ряда лет в Поволжском государственном технологическом университете на кафедрах «Информатики и системного программирования» и «Информационных систем в экономике» разрабатывались инструментальные средства визуального моделирования процессов риска в технических и экономических системах. Были разработаны два программных комплекса, в качестве языка визуального моделирования процессов риска в одном из которых используется расширение аппарата сетей Петри [1, 2, 3, 4], а в другом – подмножество языка диаграмм деятельности UML [8, 10, 11, 12]. И тот и другой языки визуального моделирования имеют свои достоинства и свои недостатки. Однако у обоих подходов имеется общая существенная проблема. В рамках обоих подходов строится полное вероятностное пространство состояний системы на заданном временном горизонте. В результате вычислительная сложность алгоритмов интерпретации визуальных моделей оказывается таковой, что эти алгоритмы следует отнести к классу $\mathbf{EXPTIME}$. Класс сложности $\mathbf{EXPTIME}$ – это множество задач, решаемых детерминированной машиной Тьюринга за время $O\left(2^{p(n)}\right)$ [17, 18], где $p(n)$ – полиномиальная функция от $n$, а $n$ – в данном конкретном случае – это количество элементов системы, которым присуща вероятностная неопределенность в поведении. С другой стороны, особенностью систем в финансово-кредитной сфере является необходимость исследования риска в портфелях, состоящих из десятков, сотен, тысяч и даже большего количества финансовых инструментов. Таковы в первую очередь розничные кредитные портфели. Здесь с ростом $n$ отмеченные программные комплексы быстро перестают работать. Следует отметить, что для альтернативных подходов, основанных на использовании метода Монте-Карло [6, 7], даже при не очень больших значениях $n$ начинает быстро падать точность оценки риска. Иными словами, для сохранения приемлемой точности оценки риска таких портфелей с использованием метода Монте-Карло необходимы такие вычислительные затраты, которые с ростом $n$ растут также слишком быстро [5]. Казалось бы, имеет место тупиковая ситуация: никак невозможно получить оценку риска с высокой точностью для большинства интересных случаев, таких как, например, розничный кредитный портфель.

Тем не менее в последние годы, в ходе многочисленных процедур отладки программного обеспечения, авторами была замечена аналогия между формированием множества сценариев поведения групп простейших подсистем, имеющих по два-три возможных состояния, и алгебраическими операциями умножения полиномов с соответствующими количествами одночленов [13]. На этой основе была создана теория, получившая название «Алгебра рисков». Строгое обоснование этой теории приведено в монографии [9]. В указанной работе, кроме всего прочего, показано, что если портфель финансовых инструментов состоит из нескольких субпортфелей, содержащих большое количество однородных (одинаковых, близких по характеристикам) инструментов, и все эти инструменты не зависимы, то использование алгебраических методов может обеспечить снижение сложности алгоритмов оценки риска до сложности алгоритмов, относимых к классу $\mathbf{PSPACE} \setminus \mathbf{NL}$. Класс сложности $\mathbf{PSPACE}$ – это множество задач, которые могут быть решены машиной Тьюринга с полиномиальным ограничением пространства [14, 17]. Класс сложности $\mathbf{NL}$ – это множество простых задач, решаемых недетерминированной машиной Тьюринга с использованием $O(\log n)$ памяти [14, 18].

Перечислим основные результаты алгебраической теории риска [9], важные для данной работы.

1. Дискретные риски и их части в экономической системе могут быть описаны в форме мультимножеств элементов, представляющих из себя пары «преобразование экономики, соответствующее исходу, и вероятность этого исхода».

2. На множестве рисков и их частей (на множестве мультимножеств) можно определить операции вычисления совместного риска (умножения) и агрегации риска (сложения).

3. С современной алгебраической точки зрения множество рисков и их частей вместе с определенными на этом множестве операциями вычисления совместного риска и агрегации риска образуют коммутативный моноид (относительно операции вычисления совместного риска), вложенный в коммутативное полукольцо с единицей, в котором аддитивная операция – это операция агрегации риска в области допустимости теоретико-вероятностной интерпретации.

4. На множестве рисков можно определить понятие натуральной степени. Интерпретацией $n$-й степени риска некоторого инструмента экономики является риск (однородного) портфеля, составленного из $n$ одинаковых таких инструментов, $n \in \mathbf{N}$, где $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел.

5. Использование полиномиальной теоремы при вычислении натуральных степеней рисков позволяет существенно снизить трудоемкость вычислений.

6. Некоторые риски и их части, представленные в форме мультимножеств, могут быть неотличимы в теоретико-вероятностном смысле. С алгебраической точки зрения, неотличимые риски и их части образуют классы эквивалентности.

7. Для любого класса эквивалентности неотличимых, с теоретико-вероятностной точки зрения, рисков возможен выбор минимального (простейшего) мультимножества этого класса. Такое минимальное мультимножество мы будем называть наименьшим (простейшим) вычетом любого элемента соответствующего класса эквивалентности.

8. Использование наименьших вычетов при компьютерных вычислениях позволяет (иногда существенно) повысить эффективность вычислений.

Рассмотрим идею использования алгебраического подхода на примере языка описания процессов риска в виде сетей Петри со случайной маркировкой отдельных групп позиций. В монографии [2] был предложен подход, основанный на представлении процесса риска в виде комбинации подсетей специального вида (рис. 1). Каждая такая подсеть описывает элементарное дискретное вероятностное пространство с небольшим количеством исходов, статистика по которым может быть легко накоплена на основе наблюдений (или получена экспертным путем). При этом появление маркеров в позициях $q_1, \ldots, q_m$ означает возникновение возможности наступления одного из вероятных событий, описываемых переходами $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Вероятность наступления каждого из этих событий описывается вероятностью маркировки соответствующей позиции $p_1, p_2, \ldots, p_n$ единицей, при условии отсутствия маркеров в остальных позициях этой группы позиций. В нотации алгебраического подхода [9] на рис. 1 представлен риск $\Sigma_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i$, где $\boldsymbol{P}_i = \left\{1 * \left(\tau(t_i), \Pr\left[M(p_i) = 1\right]\right)\right\}$ – $i$-я часть риска; $\tau : T \to C$ – отображение, сопоставляющее переходу преобразование системы; $T$ – множество переходов; $C$ – множество преобразований системы; $\Pr$ – вероятностная мера данного элементарного вероятностного пространства; $M : P \to \mathbf{Z}_0^+$ – функция маркировки; $P$ – множество позиций; $\mathbf{Z}_0^+$ – множество неотрицательных целых чисел.

Большинство встречающихся на практике вариантов комбинаций элементарных вероятностных пространств (институциональных структур исследуемых экономических феноменов) исчерпываются рекурсивным применением конструкций, представленных на рисунках 2, 3 и 4. На рисунках рекурсия конструкций возможна на знаке облака. При этом удобно предположить, что конструкция в облаке начинается с позиции и заканчивается позицией. Если предположить, что каждое облако описывает какой-либо риск, то каждый из рисунков в предположении завершения процессов (маркер находится в последней позиции) может быть описан формулой в терминах введенных операций над рисками: рисункам 2 и 3 соответствует соотношение $\Pi_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_i$; рисунку 4 – $\Sigma_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i \boldsymbol{R}_i$.

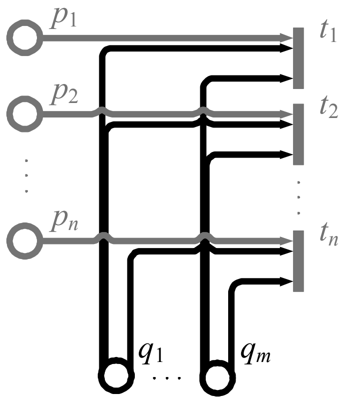


**Рис. 1. Представление элементарного вероятностного пространства**

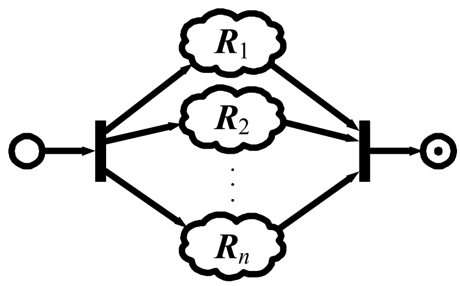


**Рис. 2. Представление параллельных случайных событий**

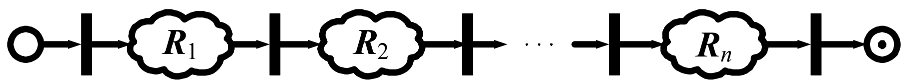


**Рис. 3. Представление последовательных случайных событий**

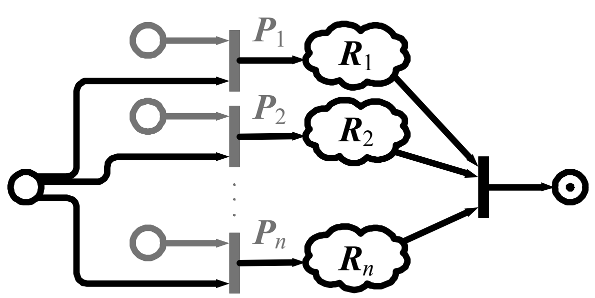


**Рис. 4. Представление ветвящегося случайного процесса**

Используя этот результат, можно заменить прямую интерпретацию сети Петри до заданного временного горизонта на процедуру, состоящую из двух этапов. На первом этапе подсеть Петри, ограниченная позициями, маркировка которых соответствует заданному временному горизонту, транслируется в алгебраическое выражение. На втором этапе это выражение вычисляется с использованием эффективных алгоритмов пакета прикладных программ «МультиМИР», реализующего идеи алгебры рисков [9]. Такой подход позволяет отодвинуть ограничения трудоемкости вычислений. Так, для кредитных портфелей, состоящих из ряда однородных субпортфелей независимых 4-сценарных договоров, возможности прямой интерпретации модели портфеля в виде сети Петри ограничены на современных персональных компьютерах (ПК) несколькими десятками договоров. Использование технологии трансляции графической модели в алгебраическое выражение с последующим использованием ППП «МультиМИР» для его вычисления отодвигает ограничение до нескольких тысяч договоров и даже нескольких десятков тысяч при распараллеливании задачи на несколько ПК. Заметим, что речь идет о точном вычислении риска портфеля при заданной модели договора! (Когда мы говорим здесь о «точном вычислении», то понимаем это с чисто алгоритмической точки зрения и абстрагируемся от ошибок округления, накапливаемых в процессе вычислений и зависящих от используемых типов данных в соответствующей системе программирования.)

Интересно, что имеются конструктивные результаты и для портфелей, состоящих из еще б**о**льшего количества договоров. Эти результаты касаются не риска в целом, а лишь некоторой его меры. В работе [9] наряду с исследованием алгебраических свойств риска выявлены особенности совместного асимптотического поведения таких мер риска как математическое ожидание, стандартное отклонение и «Value at Risk» [15, 16] для портфелей, состоящих из нескольких субпортфелей, каждый из которых содержит большое количество однородных инструментов. Используя методы прямого вычисления риска можно параметризовать отмеченные особенности, изучая связь перечисленных мер риска при различных, доступных для прямого вычисления, объемах портфеля с неизменной структурой (соотношением объемов субпортфелей). Зная эти параметры, можно легко вычислить меру риска «Value at Risk» для портфеля любого достаточно большого объема заданной структуры. Учитывая особую значимость меры «Value at Risk» в современном риск-менеджменте, можно говорить о существенной практической значимости этого результата.

Подводя итог, можно сказать, что использование алгебраических идей в ряде случаев позволяет существенно отодвинуть границы возможностей имитационного моделирования. При этом сочетание методов прямой имитации на моделях с алгебраическими подходами способно дать синергетический эффект, когда расширяются горизонты применимости и преодолеваются ограничения обоих подходов.

**Литература**

1. **Бородин, А.В**. Игры на сетях Петри / А. В. Бородин // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2002. – Т. 9. – В. 1. – С. 167–168.

2. **Бородин, А.В.** Математические модели управления кредитным портфелем коммерческого банка / А. В. Бородин. – Йошкар-Ола: Марийский государственный технический университет, 1998. – 168 с.

3. **Бородин, А.В.** Сети Петри с нечетким поведением в задачах имитационного моделирования эволюции инвестиционных и страховых портфелей / А. В. Бородин // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2000. – Т. 7. – В. 2. – С. 321–322.

4. **Бородин, А.В**. Теоретико-игровые модели процессов риска над сетями Петри / А. В. Бородин // Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах: Труды

международной научной школы МАБР-2006. – СПб.: ГОУ ВПО «СПбГУАП», 2006. – С. 305–307.
5. **Грант, К.Л.** Управление рисками в трейдинге: Как повысить прибыльность с помощью контроля над рисками / К. Л. Грант. – М.: Мир, 2005. – 349 с.
6. **Джекел П.** Применение методов Монте-Карло в финансах / П. Джекел. – М.: Интернет-трейдинг, 2004 – 263 с.
7. **Ермаков С.М.** Метод Монте-Карло в вычислительной математике. Вводный курс / С. М. Ермаков. – СПб.: Невский Диалект, Бином. Лаборатория знаний, 2009. – 192 с.
8. **Уразаева Т.А.** Автоматизированная система визуального моделирования риск-процессов институциональной экономики // Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах: Труды международной научной школы МА БР-2006. – СПб.: ГОУ ВПО «СПбГУ-АП», 2006. – С. 284–291.
9. **Уразаева, Т.А.** Алгебра рисков / Т. А. Уразаева. – Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2013. – 209 с.
10. **Уразаева Т.А.** Методология моделирования риска портфелей срочных финансовых инструментов // Аудит и финансовый анализ. – 2010. – № 5 – С. 456–465.
11. **Уразаева, Т.А.** Модели связанных заемщиков в нотации диаграмм деятельности UML // Управление конкурентоспособностью региона: стратегии, модели, информационно-аналитическое обеспечение: Региональная науч.-практ. конф. Ч. 1. – Йошкар-Ола: МарГТУ, 2011. – С. 202–206.
12. **Уразаева, Т.А.** Синтаксическая модель языка визуального представления развивающихся экономик // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2006. – Т. 13. – В. 1. – С. 147–149.
13. **Уразаева, Т.А.** Финансовые риски: алгебраическая модель исчисления / Т. А. Уразаева // Региональная экономика: теория и практика. – 2010. – № 2(137). – С. 33–35.
14. Arora S. Computational Complexity: A Modern Approach / S. Arora, B. Barak. – №ew York: Cambridge University Press, 2009. – 579 p.
15. **Holton, G.A**. Value-at-Risk: Theory and Practice / G. A. Holton. – Academic Press, 2003. – 405 p.
16. **Jorion, P.** Value at Risk: The №ew Benchmark for Managing Financial Risk / P. Jorion. – McGraw-Hill, 2006. – 543 p.
17. **Papadimitriou, C.H.** Computational complexity / C. H. Papadimitriou. – №ew York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1994. – 523 p.
18. **Sipser, M**. Introduction to the Theory of Computation / M. Sipser. – Boston: Thomson Course Technology, 2006. – 431 p.