ВЫБОР МЕЖДУ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО И ГИСТОГРАММНОЙ АРИФМЕТИКОЙ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ МОДЕЛЕЙ С ЭЛЕМЕНТАМИ СЛУЧАЙНОСТИ

В.А. Углев (Железногорск)

Составление и просчет моделей сложных объектов связаны с необходимостью учитывать неопределенности. При формализации моделей обычно приходится придерживаться одного из двух базовых подходов: аналитического или имитационного. Очевидно, что если известны точные параметры случайных процессов и задача имеет четкую последовательность этапов, то принято использовать аналитические подходы. Если же алгоритм расчета может меняться от эксперимента к эксперименту, то без имитационной модели, опирающейся на *метод Монте-Карло*, не обойтись [1]. Но что выбрать в промежуточных случаях, когда известна часть статистики, не позволяющая уверенно перейти к аналитической форме описания функции плотности случайной величины? Упрощать или имитировать? Особенно остро такая проблема стоит при наличии ограничений на вычислительные мощности или время расчетов. Рассмотрим эту проблему подробнее, заострив внимание на возможностях применения в этих ситуациях *численного вероятностного анализа*.

Известно, что если дан временной ряд реализации процесса и его поведение не удается описать с требуемой точностью аналитическим законом, то его обычно сводят к вероятностной мере. Чем больше статистики, тем точнее получается эмпирическая функция распределения случайной величины [2]. Следовательно, на ее основе можно сгенерировать ряд псевдослучайных величин, отражающих (имитирующих) поведение исходного процесса [3, 4]. Но в случае, когда таких процессов много и последовательность их выполнения отлична от линейной, возникают трудности при оценке функции итогового распределения целевого параметра имитационной модели. Это распределение будет задано функцией распределения какой-то дискретной случайной величины, форма которой определяется после существенного числа просчета имитационной модели (эмпирическим способом). Есть ли альтернативы у метода Монте-Карло (МК)? Для начала следует рассмотреть базовые формы представления случайных значений в моделях.

Случайность можно формализовать с разной степенью потери (погрешности). Все зависит от объема имеющейся в наличии статистики и формы представления:

Точка (одно число) – вероятностная мера, редуцирующая все богатство поведения процесса к единственному наиболее вероятному исходу. Данная форма применяется при допущениях, что процесс имеет только один благоприятный исход и его частота довольно точно определена. В этих ситуациях обычно применяется традиционная теория вероятностей и математическая статистика [2] или метод Монте-Карло [5].

Интервал (два числа) – равновероятная возможность появления процесса в заданных диапазонах. Это допущение справедливо тогда, когда процесс проявляется в определенном диапазоне значений, его поведение разнообразно, но статистики недостаточно для каких-либо доказательных обобщений. Тогда применяется интервальная математика [6, 7] или интервал редуцируется к точке (математическому ожиданию или своей середине) и вновь применяются вероятностные методы (включая метод МК).

Гистограмма (вектор) – эмпирическое распределение случайной величины, в котором каждое состояние системы или их группа имеют определенную частоту появления. Данная форма представления применима как при небольшом, так и при существенном объеме исходных статистических данных, не позволяющих перейти к аналитической форме по какой-либо причине. Здесь уместно говорить о широко применяемом методе обратных функций с помощью МК и численном вероятностном анализе (ЧВА) на *базе гистограммной арифметики* (ГА) [8].

Функция (закон) – аналитическая форма представления вероятности проявления случайного процесса. При этом допускается, что найдена такая форма представления динамики случайной величины, которая отождествляется с истинной формой. В этой ситуации применимы как методы теории вероятностей, так и имитация аналоговой случайной величины методом МК.

Из представленного обзора можно сделать два обобщения. Во-первых, чем проще представление, тем погрешность описания истинного распределения случайной величины выше. Следовательно, для повышения точности модели следует стремиться повысить точность описания, стремясь к закону. Во-вторых, во всех случаях имитация может производиться методом МК, что говорит об его универсальности. В данной работе не будет рассматриваться его суть, но о недостатках сказать следует.

Проблематичностью применения метода МК является длительность и ресурсоемкость проведения имитационного эксперимента. Для каждой реализации случайной величины используется генератор псевдослучайных величин, осуществляющих набор действий сначала по генерации равномерно-распределенной псевдослучайной величины, а затем по ее отображению на ту форму представления, которая принята за основу в конкретной модели. Чем сложнее представление, тем больше затрачивается процессорного времени и тем дольше идет имитационный эксперимент[1]. Поэтому там, где можно свести просчет модели к разумному по сложности аналитическому преобразованию, это приветствуется[2]. Конечно, важна и алгоритмическая осуществимость таких преобразований, которую система моделирования должна уметь осуществлять без участия человека.

При работе со сложной формой эмпирического распределения случайной величины, кроме МК, применим метод ЧВА. Он базируется на понятии элиторной (aleatory) неопределенности [13]. Имея набор величин, каждая из которых задана гистограммой, можно осуществить их последовательное преобразование для получения искомого результата. При применении метода гистограммной арифметики появляется возможность избежать длительного и ресурсоемкого моделирования, осуществляя преобразования сразу над гистограммами. Введем некоторую формализацию в соответствии с [12, 13].

Дана функциональная зависимость $y = f(x)$, где x – вектор m входных величин с элементами случайности, а y – выходное значение. Если каждый элемент из x задан функцией плотности (гистограммой), то возникает задача поиска значений результирующей функции плотности вероятности y. Для случая, когда переменные x_i независимы, можно применить ЧВА. Но для этого требуется иметь гистограмму. Пусть P – кусочно-постоянная функция (гистограмма), заданная на сетке $\{z_i, i=0,1,\ldots n\}$ (на интервале $[z_{i-1}, z_i]$ значение гистограммы p_i=const). Тогда в рамках ЧВА имеется возможность выполнения численных операций над плотностями случайных величин и их функций, т.е. реализация гистограммной арифметики.

[1] Отметим, что при использовании метода МК в серьёзных прикладных моделях «чистота» эксперимента предполагает проведение нескольких просчётов модели и усреднения результатов [9] прежде, чем их можно будет обоснованно использовать для принятия решений.

[2] Например, в теории массового обслуживания, в которой все псевдослучайные законы определены (интенсивность поступления в модель транзактов и их обслуживание), оценка параметров модели может быть осуществлена однозначным аналитическим преобразованием и не требует реализации МК [10]. Другой пример – предпочтение интервальных методов в задачах, когда требуется надёжно знать граничные значения изменения процесса [11].

Базовыми операциями над гистограммами в ГА являются классические сложение, вычитание, умножение и деление [12, 13]. Суть реализации этих операций описывается следующей последовательностью действий:

1) вводится сетка пересечений гистограмм;
2) определяется носитель совместной вероятностей $p(x_1,x_2)$ – прямоугольная сетка размерностью n_2, вероятность попадания в ячейки которой является постоянной величиной;
3) осуществляется обход каждой ячейки для вычисления значения ее вклада в соответствующий отрезок итоговой гистограммы;
4) реализуется нормирование результатов.

Специфика данного алгоритма для различных арифметических операций будет заключаться в шаге № 3, т.к. применяются различные правила включения тех или иных ячеек (возможно, даже их частей) в рассмотрение очередного сегмента диаграммы. Аналогичным образом осуществляется обработка операций, в которых вторым элементом является не гистограмма, а единичное число или функция.

С точки зрения машинной реализации, ГА является очень эффективным методом расчетов, т.к. приводит к результатам оценки поведения каскада преобразований случайных процессов (векторов) при использовании простых операций. Они не требуют реализации неоднозначных преобразований, т.е. вычисления производятся существенно быстрее, нежели бы шла обработка аналитической формы представления (закона). Применять ГА эффективнее по ресурсам и времени расчетов, чем многократно запускать просчет модели с элементами МК, требующий последующего усреднения ответа (есть оценка, что любая операция будет осуществлена за $O(n^2)$ итераций). Получающееся в результате вычислений над гистограммами распределение, отражающее динамику поведения результирующего показателя, не требует дальнейшей обработки и сразу может быть применено для принятия решений. Поэтому в задачах, в которых нет необходимости имитировать выполнение самого процесса (получение псевдослучайных временных рядов, отрисовка динамики поведения системы и пр.), применение ЧВА на базе ГА вполне оправдано, т.е. *если цель – не сам процесс, а результат*.

Внимательно присмотревшись к ГА, можно провести аналогию с методом нечеткой логики, в котором Л. Заде в [14] вводит арифметику над нечеткими множествами (характеристическими функциями). Но их отождествление поспешно, т.к. арифметические операции производятся совершенно по различным правилам и нацелены на разные объекты. В случае с нечеткой логикой – это качественные обобщения на однородном (шкалированном) множестве различных гипотез. В методе с ГА – это интегральная эмпирическая функция распределения поведения случайного процесса, прошедшего через ряд произвольных (последовательных) преобразований.

Проиллюстрируем применение метода ЧВА при разработке ядра программно-математической имитационной модели бортовой аппаратуры командно-измерительной системы спутника связи [15]. Так как объектом моделирования с целью подбора приемлемых конструкторских решений является оборудование ответственного применения с длительным сроком активного существования, на первый план выходят требования по надежности [16, 17]. Для повышения точности автоматической оценки рисков представим описание потока отказов в форме гистограмм. Тогда просчет схемы надежности, с учетом различных типов резервирования, будет представлен в виде последовательности арифметических операций над гистограммами.

Выбор между аналитическими и имитационными методами исследования динамики случайных процессов должен быть рационален. Цель (результат) моделирования должна определять метод, учитывая базовые факторы (скорость просчета, вычислительные ресурсы, точность вычислений). В связи с этим не всегда метод Монте-Карло может давать наилучший результат. В ситуациях, при которых целью является получение итоговой динамики поведения системы, численно вероятностный анализ может быть более предпочтителен.

Литература

1. **Шеннон Р.** Имитационное моделирование систем – искусство и наука – М.: Мир, 1978. – 420 с.
2. **Вентцель Е.С.** Теория вероятностей: учеб. – М.: Академия, 2005. – 576 с.
3.**Гнеденко Б.В.** Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 448 с.
4. Имитационное моделирование: учеб. пособ.: В.А. Углев, В.А. Устинов. – Абакан: Сиб. федер. ун-т; ХТИ – Филиал СФУ, 2011. – 116 с.
5. **Соболь И.М.** Метод Монте-Карло. – М.: Наука, 1968. – 64 с.
6. **Алефельд Г., Херцбергер Ю.** Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987. – 356 с.
7. Интервальная математика: Учеб. пособ.: Б.С. Добронец. – Красноярск: КГУ, 2004.–216 с.
8. **Герасимов В.А. Добронец Б.С., Шустров М.Ю.** Численные операции гистограммной арифметики и их применения // АиТ. – 1991. – №2. – С. 83–88.
9. **Рыжиков Ю.И**. Имитационное моделирование. Теория и технологии. – М: Альтекс-А, 2004. – 384 с.
10. **Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н**. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: ЛКИ, 2007. – 400 с.
11. **Углев В.А., Добронец Б.С**. Применение методов имитационного моделирования и интервальной математики при оптимизационном проектировании оборудования космических аппаратов // Решетневские чтения: материалы XVI международной науч. конф.. Ч. 1. – Красноярск: СибГАУ, 2012. – С. 39–40.
12. **Добронец Б.С., Попова О.А**. Численный вероятностный анализ и вероятностные расширения // материалы XIV международной конф. по эвентологической математике и смежным вопросам. – Красноярск. – 2011. – С. 67–69.
13. **Добронец Б.С., Попова О.А**. Гистограммные временные ряды // ФАМЭТ 2011: материалы X международной конф. – Красноярск: КГТЭН, СФУ, 2011. – С.130–133.
14. **Заде Л**. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений: пер. с англ. Математика. Вып. 3. – М.: Мир, 1976. – 168 с.
15. **Uglev V.A., Mishkina №.**Yu. Command, communication, and telemetry system work modeling for optimal choice of a design decisions // Сучасні проблеми і досягнення в галузі радіотехніки, телекомунікацій та інформаційних технологій: Тези доповідей VI Міжнародної наукової конференції. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2012. – С. 282–284.
16. **Морозова А.И.** Методы и проблемы расчета надежности аппаратуры космических аппаратов // Радиоэлектронное приборостроение как основа высокотехнологического обновления всех отраслей производства. – Харьков: ХНУРЭ, 2013. – С. 88–90.
17. **Углев В.А.** Проблема возрастания вклада погрешностей в методах оценки надежности сложных технических объектов // Интеллект и наука: материалы XIII международной науч. конф. – Железногорск: Филиал СФУ, 2013. – С. 128–129.