

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ИССЛЕДУЕМОЙ ФУНКЦИИ В ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ**В. Д. Бабишин, А. Н. Давыдов, В. К. Дедков, М. А. Дорошенко (Москва)**

Большинство случайных процессов, встречающихся на практике, имеют нестационарный характер, а для решения задачи анализа (измерения) показателей технического состояния различных объектов управления необходимо, чтобы выходной процесс можно было представить в виде стационарной случайной функции.

Большинство нестационарных случайных процессов, отображающих реальные физические явления, имеют особенности, которые упрощают их анализ и измерение. Например, когда все выборочные функции, описывающие нестационарный случайный процесс, удается представить в виде суммы выборочной функции стационарного случайного процесса и детерминированной функции, определяющей нестационарную часть процесса, называемую трендом [4]. При исключении тренда остается лишь случайная компонента временной последовательности, которая обладает свойством стационарности [5] и к которой применимы методы анализа стационарных случайных процессов. Поэтому анализ функционирования и анализ технического состояния различных объектов управления следует начинать с процедуры сведения случайных процессов функционирования данных объектов к стационарности, и только тогда, когда это не удастся, целесообразно применять специальные подходы, рассматриваемые в [1], [4].

Обзор существующих методов преобразования нестационарных случайных процессов в стационарные

В настоящее время для того, чтобы преобразовать нестационарный случайный процесс в стационарный, используются, как правило, следующие методы анализа случайных процессов:

1. Методы регрессионного анализа, применяемые к случайным процессам, реализации которых могут быть представлены в виде случайного процесса, описываемого следующим выражением

$$x(t_i) = a(t_i) + \hat{u}(t_i),$$

где $a(t_i)$ – тренд случайного процесса во времени; $\hat{u}(t_i)$ – стационарный временной ряд; \wedge – символ случайного объекта.

Операция сведения нестационарного **в среднем** случайного процесса к стационарному заключается в исключении тренда $a(t_i)$ из математической модели случайного процесса, т.е. из исходной последовательности $\hat{x}(t_i)$. Модель тренда выбирается исходя из условий задачи [4].

2. Метод скользящих средних применяется тогда, когда априорная информация о характере тренда отсутствует. Этот метод основан на представлении нестационарной части временного ряда $a(t_i)$ в виде последовательности средних значений исходного ряда, вычисленных на коротком временном интервале, центр которого "скользит" вдоль всего ряда. По сути дела, проводится процедура усреднения последовательности $\hat{x}(t_i)$ в плавающем окне, в результате чего ряд скользящих средних приобретает форму $a(t_i) = \bar{x}(t_i)$, являющуюся трендом, благодаря чему последовательность $a(t_i)$ приобре-

тает «гладкость» в сравнении с исходным рядом. Вычитанием $\bar{x}(t_i)$ из исходного ряда осуществляется переход к стационарной последовательности: $\hat{u}(t_i) = \hat{x}(t_i) - \bar{x}(t_i)$ [4].

3. Метод разностных операторов, заключающийся в переходе от исходной временной последовательности к ряду разностей соседних значений [4]. Преобразованный ряд $\hat{y}(t_i)$ короче исходной последовательности $\hat{x}(t_i)$ на один член и не содержит нестационарности. В результате такого преобразования структура стационарной компоненты изменяется.

Недостатком приведенных выше трех методов является снижение точности вычислений в результате удаления части полезной информации из исходного процесса.

4. Преобразование Гильберта позволяет разложить исходный нестационарный случайный процесс на две составляющие – амплитудную и фазовую [4]. Это позволяет обнаружить взаимосвязь процессов, проявляющуюся в синхронности динамики фаз, даже тогда, когда амплитудная динамика остается несвязанной и другие методы обнаружения связанности процессов являются непригодными.

Недостатком данного метода является невозможность проведения комплексного оперативного анализа нестационарного случайного процесса, так как данный метод предусматривает проведение анализа только отдельных составляющих случайного процесса (фазовой и амплитудной).

5. Вейвлет-преобразование широко используется для анализа нестационарных процессов и заключается в разложении ряда по базису, сконструированному из обладающей определенными свойствами функции $\psi(t)$, называемой вейвлетом, посредством ее масштабных изменений и переносов [4], который позволяет анализировать процесс одновременно в двух плоскостях (фазовой и амплитудной).

Для осуществления вейвлет-преобразования произвольной реализации процесса необходимо предусмотреть возможность сдвигов вейвлет-функций вдоль временной оси и масштабных преобразований в частотной области путем сжатия или растяжения исходного вейвлета.

Достоинством вейвлет-функции является возможность проведения анализа случайного процесса одновременно в двух плоскостях (фазовой и амплитудной).

Недостатком данного метода является то, что масштабный подход к анализу случайных процессов не позволяет использовать разложение случайного процесса в ряд Фурье, а это, в свою очередь, приводит к использованию численных методов для решения задачи анализа (измерения) показателей технического состояния различных объектов управления, представленных в виде нестационарных случайных процессов, что в конечном счете приводит к снижению оперативности проведения анализа случайных процессов.

Решение задачи и результаты

Для решения данной задачи предлагается использовать метод сведения к стационарности на основе представления исходной непериодической функции (нестационарного случайного процесса) в виде интеграла Фурье на ограниченном временном отрезке и получения результатов в виде графиков случайного процесса в среде для имитационного моделирования AnyLogic в реальном (модельном) масштабе времени [2].

В качестве выходного процесса объекта управления рассматривался выходной нестационарный случайный процесс изменения температуры T объекта управления на интервале модельного времени от 0 до 550 системы терморегулирования, который необходимо свести к стационарному.

Выходной процесс изменения температуры $T(t)$ объекта управления является нестационарным случайным и описывается в среде AnyLogic следующим уравнением:

$$\hat{T}(t) = \hat{T}'(t) + S(t),$$

где $\hat{T}'(t) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{a} \times (k \times U - \hat{F} - \hat{T}) \right) dt$ – стационарный случайный процесс [2];

a – коэффициент пропорциональности, определяемый параметрами объекта управления;

k – коэффициент усиления объекта по управлению;

U – текущее значение величины управляющего воздействия (напряжения);

T – текущее значение температуры объекта управления;

F – изменяющееся внешнее воздействие, представленное случайной величиной, которая с вероятностью $\frac{1}{n-1}$ принимает одно из значений, лежащих на интервале $[0, 1)$, (здесь n – количество значений, лежащих на интервале $[0, 1)$, причем $n \rightarrow \infty$);

$S(t) = \int_0^{\infty} e^t dt$ – некоторая детерминированная функция [3], реализованная в среде AnyLogic.

Выражения, описывающие рассматриваемые процессы, задавались в классе активного объекта в виде переменных и связей между ними. При создании модели был создан класс активного объекта, в котором затем были размещены переменные и заданы функции от этих переменных, описывающие исследуемые процессы.

Для величины T объекта управления задано: начальное состояние $T(0) = T_0 = 0$. График нестационарного процесса, представленный на рис. 1, получен в среде AnyLogic с монитора в реальном масштабе времени.

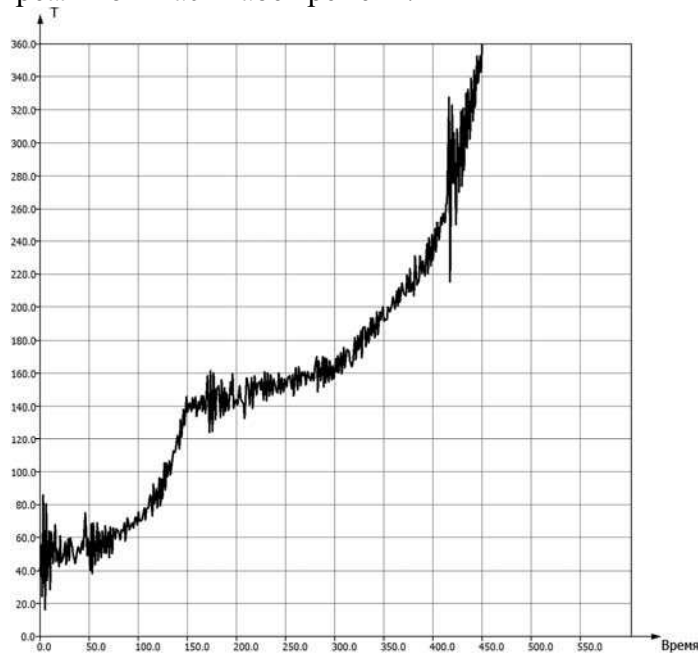


Рис. 1. График случайного нестационарного процесса

Интеграл, соответствующий в определенном смысле ряду Фурье, в котором суммирование по индексу n заменено интегрированием по некоторому параметру, имеет следующий вид [3]:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy] dy, \quad (1)$$

где $a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ytdt$ (2)

и $b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ytdt$ (3)

коэффициенты.

Интеграл (1) называется интегралом Фурье функции f . Подставляя выражения (2) и (3) в интеграл (1) согласно [3] преобразуем интеграл (1) в следующее выражение, обеспечивающее представление исследуемого случайного нестационарного процесса $T(t)$ в виде интеграла Фурье:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos y(x-t)dt$$

или

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}(t)\cos y(x-t)dt, \quad (4)$$

где $\hat{T}(t)$ – нестационарный случайный процесс.

Подобно тому, как сумма ряда Фурье функции при определенных условиях дает значение самой функции, интеграл Фурье также дает представление исходной функции.

Справедливость выражения (4) обеспечивается при выполнении условий теоремы [3] о кусочной непрерывности функции f на каждом конечном отрезке и ее абсолютной интегрируемости на всей вещественной прямой, а также существовании в каждой точке x производной справа $f_+(x)$ и производной слева $f_-(x)$, т.е. когда выполняются следующие условия:

1) заданы ограничения на границы интегрирования в виде отрезка $[0, \eta]$;

2) функция f кусочно непрерывна на каждом конечном отрезке и абсолютно интегрируема на всей вещественной прямой.

Тогда выражение (4) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\eta} dy \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}(t)\cos y(x-t)dt,$$

где $\eta = 450$, что соответствует диапазону модельного времени, y – некоторый параметр, x – произвольное фиксированное число, t – модельное время, $\hat{T}(t)$ – нестационарный случайный процесс.

Графики преобразованного с помощью интеграла Фурье процесса на ограниченном временном отрезке представлены на рис.2, 3.

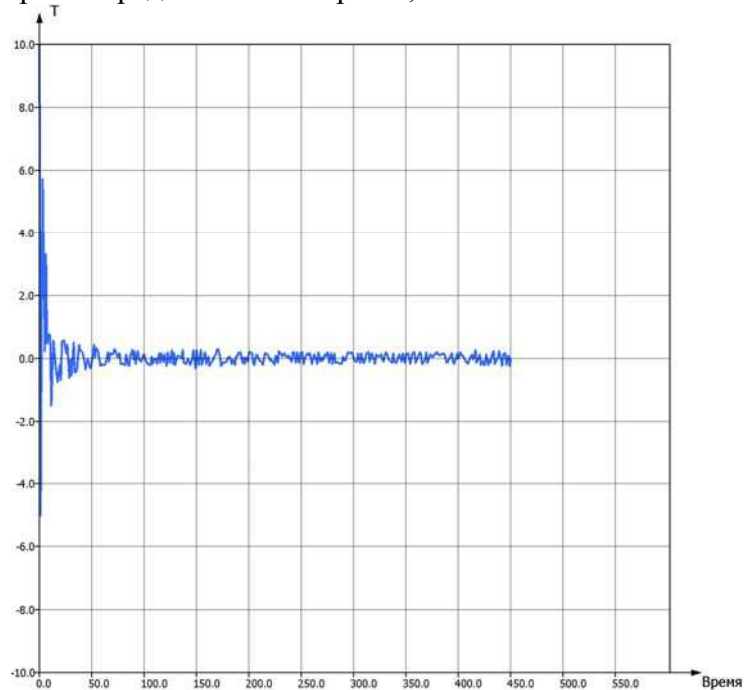


Рис. 2. График случайного нестационарного процесса, представленного в виде интеграла Фурье

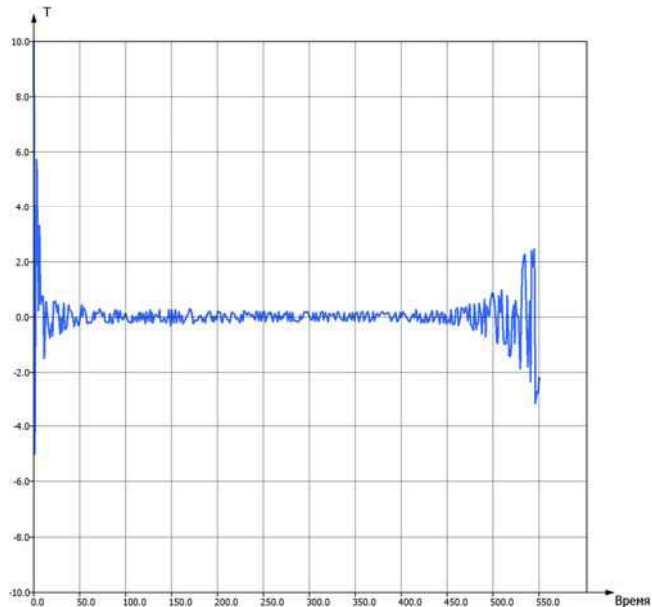


Рис.3. График представленного в виде интеграла Фурье случайного нестационарного процесса при выходе за границы интегрирования

Как видно из рис. 2, на заданном отрезке график преобразованной с помощью интеграла Фурье функции $\hat{T}(t)$ ведет себя как стационарный случайный процесс, в то время как исходный процесс, представленный на рис. 1, является нестационарным случайным процессом.

Из рис. 3 видно, что выход за границы интегрирования приводит к тому, что график преобразованной с помощью интеграла Фурье функции $\hat{T}(t)$ начинает вести себя как нестационарный случайный процесс.

Таким образом, график преобразованной с помощью интеграла Фурье случайной функции $\hat{T}(t)$ убывает и сходится к среднему значению на отрезке от 0 до 450, что позволяет рассматривать исследуемый случайный процесс как стационарный.

Все приведенные графики получены в среде AnyLogic. Таким образом, с помощью полученных графиков можно проводить оперативный анализ технического состояния объекта управления путем имитационного моделирования нестационарных случайных процессов и представления этих процессов в виде интеграла Фурье на ограниченном отрезке в среде AnyLogic и проверки этих процессов на стационарность.

Заключение

Предложенный метод анализа технического состояния объекта управления на основе разложения исследуемой функции в интеграл Фурье позволяет преобразовать нестационарный случайный процесс в стационарный случайный процесс на ограниченном временном отрезке. При этом обеспечивается наглядность представления текущих значений параметра на экране видеомонитора.

Преобразование нестационарных случайных процессов в стационарные случайные процессы с использованием критериев сходимости ряда Фурье, предложенных в предыдущей статье [5], позволяет оперативно оценивать техническое состояние функционирования объекта управления в реальном масштабе времени.

Преобразование нестационарного стационарного случайного процесса в стационарный случайный процесс с помощью представления данного процесса в виде интеграла Фурье на ограниченном временном отрезке позволяет применить аналитические методы принятия решений по предотвращению нештатных ситуаций в сложных технических системах и таким образом существенно повысить оперативность принятия решений.

Литература

1. **Гурский Е. И.** Теория вероятностей с элементами математической статистики. Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1971.
2. **Карпов Ю. Г.** Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5. СПб.: БХВ–Петербург, 2005.
3. **Кудрявцев П. Д.** Математический анализ. М.: Высшая школа, 1970.
4. **Хованова Н. А., Хованов И. А.** Методы анализа временных рядов. Учебное пособие. Саратов: Колледж, 2001.
5. **Бабишин В. Д., Дорошенко М. А.** Метод оперативного анализа технического состояния объекта управления на основе имитационного моделирования стационарных случайных процессов // Прикладная информатика. 2011. № 4, август.