ПОЛУЧЕНИЕ АНАЛОГОВ ФОРМУЛЫ ПОЛЯЧЕКА–ХИНЧИНА МЕТОДАМИ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

И. Э. Сулейменов, А. С. Байкенов
(Алма-Ата, Казахстан)

В работе [1] ранее было показано, что особенности статистических характеристик реального трафика мобильной связи не позволяют использовать многие классические результаты теории телетрафика. Распределения телефонных разговоров по продолжительности часто обладают бесконечной дисперсией, что, в частности, не позволяет использовать формулу Полячека–Хинчина, в которую непосредственно входит дисперсия соответствующего распределения [2].

В данной работе предложен метод получения аналогов указанной формулы для случая распределений, обладающих бесконечной дисперсией.

Метод основан на использовании формулы

$$P(t) = \frac{A}{t^2}\left(1 - exp\left(-\frac{t^3}{\tau^3}\right)\right), \quad (1)$$

которая с удовлетворительной точностью [1, 3] описывает статистику телефонных разговоров (мобильная связь) по продолжительности (по крайней мере, данная формула хорошо отражает экспериментальные данные для подавляющего большинства городов Республики Казахстан). А именно, $P(t)$ представляет собой плотность вероятности того, что отдельный телефонный разговор будет иметь продолжительность t. В формуле (1) A есть нормировочный множитель, а феноменологический параметр τ зависит от конкретного города и периода времени, к которому относится набранная статистика.

На рис. 1 представлены зависимости времени ожидания заявки в очереди W от нагрузки λ, полученные с помощью имитационного моделирования средствами GPSS для Алма-Аты и Талдыкургана в осенне-зимний период 2008 г. Аналогичные результаты получены для Павлодара, Кустаная, Алма-Аты и Талдыкургана в весенне-летние периоды 2009–2011 гг. В программу вводилось статистическое распределение, полученное на основе экспериментальных данных (1), т.е. рассматриваемый случай относится к M/G/1 по классификации Кендалла. Средствами GPSS программы рассчитывалось среднее время ожидания в очереди как функция интенсивности входного потока.

При выборе диапазона расчетных значений входного потока использовалось среднее время обслуживания заявки, полученное на основании экспериментальных данных для каждого случая отдельно. Подчеркнем, что хотя распределение (1) и имеет «тяжелый хвост», т.е. его дисперсия равна бесконечности, однако в силу того, что при больших t имеет место:

$$P(t) \propto \frac{A}{t^2}, \quad (2)$$

среднее значение продолжительности разговора конечно.

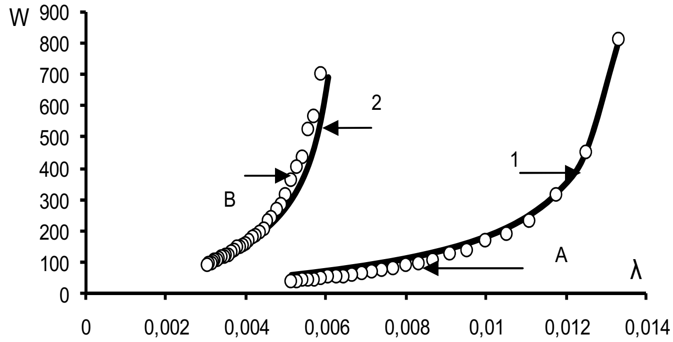

Рис. 1 .Зависимость среднего времени ожидания в очереди от интенсивности входного потока для городов Алма-Ата (А,1) и Талдыкурган (В,2); значения А, В получены средствами имитационного моделирования, с плошные линии 1 и 2 – результат аппроксимации

Из рис. 1 видно, что время ожидания обслуживания, как и следовало ожидать, резко возрастает по мере приближения значения произведения $\lambda\rho$ к единице (где λ - интенсивность поступления вызовов; $\rho = 1/<t>$; $<t>$ – среднее время обслуживания заявок для каждого из городов).

Для случая распределений с конечной дисперсией зависимости, подобные представленной на рис. 1, могут быть вычислены на основе формулы Полячека–Хинчина, однако в данном случае не имеется даже возможности для сравнения ввиду бесконечного значения дисперсии.

Аналог формулы Полячека–Хинчина, описывающий такие зависимости, может быть получен методом фазовых портретов. Фазовый портрет представляет собой зависимость производной некоторой величины по времени от самой этой величины. В данном случае это зависимость производной $\mathrm{d}W/\mathrm{d}\lambda$ от W.

Фазовые портреты полученных кривых носят параболический характер. Это, в частности, означает, что зависимость $W(\lambda)$ описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\lambda} = aW^2 + bW + c, \quad (3)$$

где a, b, c – полуэмпирические константы. Данное уравнение имеет решение вида

$$W = \frac{D}{2a} tg\left(D\frac{\lambda + C}{2} - b \right), \quad (4)$$

где $D = \sqrt{4ac - b^2}$, а постоянная интегрирования C может быть определена из граничного условия $W(\lambda = 0) = 0$, т.е.

$$C = \frac{2}{D} arctg\left(\frac{b}{D} \right). \quad (5)$$

Фазовые портреты исследуемых зависимостей, построенных по данным для Алма-Аты и Талдыкургана, показаны на рис. 2 (использовалось численное дифференцирование). Там же представлена аппроксимация полученных фазовых портретов параболами.

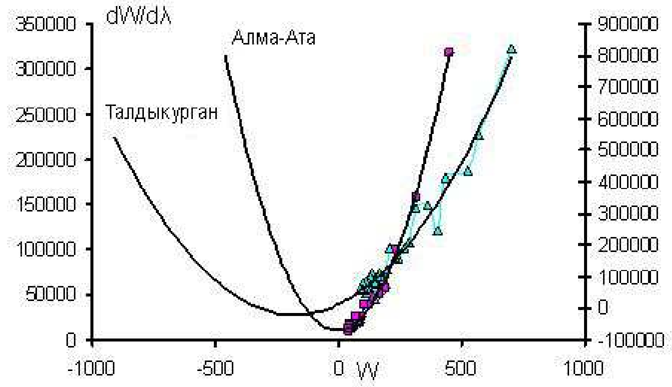

Рис. 2. Фазовые портреты исследуемых зависимостей и их аппроксимации для Алма-Аты и Талдыкургана

Решения вида (4) для случаев Алма-Аты и Талдыкургана представлены на рис. 1 сплошными линиями (кривые *1* и *2* соответственно). Видно, что данные решения хорошо описывают результаты, получаемые методами имитационного моделирования. Сходные результаты получены также для городов Талгар и Павлодар.

Таким образом, существует возможность для установления зависимости параметров a, b, c, позволяющих получить аналог формулы Полячека–Хинчина для случая распределения (1) с бесконечной дисперсией средствами имитационного моделирования. Такая зависимость в принципе может быть табулирована и использована как справочная характеристика. Однако такое использование предложенного метода становится оправданным только в том случае, когда вид распределения (1) носит достаточно общий характер, т.е. либо будет подтвержден независимыми измерениями для других регионов, либо это распределения будет получено из других соображений.

Можно высказать предположение, что вид данного распределения отражает закономерности, изучаемые физической экономикой [4]. Действительно, телефонные разговоры различной продолжительности можно рассматривать как однотипные, но имеющие неодинаковую стоимость, услуги. Соответственно параметр τ отражает по большей части экономическую ситуацию в конкретном городе.

Выводы

Существуют достаточно простые возможности для получения аналога формулы Полячека–Хинчина в том случае, когда базовое статистическое распределение телефонных разговоров по продолжительности обладает бесконечной дисперсией. При условии, что параметризация (1) имеет достаточно общий характер, таким аналогом является формула (4).

Литература

1. **Сулейменов И. Э., Байкенов А. С**. Имитационное моделирование беспроводных сетей связи в городах Казахстана // ИММОД-2009. СПб., 2009.
2. **Крылов В. В., Самохвалова С. С**. Теория телетрафика и ее приложения. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 288 с.
3. **Сулейменов И. Э., Байкенов А. С., Молдахан И., Сулейменова К. И**. Особенности статистических характеристик трафика: междисциплинарный подход // Вестник Алматинского университета энергетики и связи. 2010. № 4. С .46–51.
4. **Чернавский Д. С., Старков Н. И., Щербаков А. В.** О проблемах физической экономики // УФН. 2002. Т. 172. С. 1045–1066.